فرآیندهای تصادفی
مقدمات

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

فرایندهای تصادفی

مدل ریاضیاتی

- توصیف کمّی پدیدهٔ فیزیکی
  - معادلهٔ سقوط جسم با سرعت اولیهٔ صفر
  - برنامهٔ پیچیدهٔ رایانه جهت شبیه‌سازی جمعیتی زیستی یا سامانهٔ صنعتی بزرگ
- استفاده‌های مدل
  - توصیف جزئیات فرایند
  - پیش‌بینی خروجی‌ها
  - طبقه‌بندی
- قضاوت و ارزیابی مدل مبنی بر «فایدهٔ» مدل
  - توضیح کمی دقیق
    - مدل فهرست موجودی
    - استفاده برای تعداد بهینهٔ جهت انبار کردن
  - اطلاعات کیفی عمومی دربارهٔ روابط بین ضرائب و عوامل موثر بر پیشامد
  - برای پدیدهٔ خاص بهترین مدل وجود ندارد
    - استفاده از عیار عملگرای فایده‌مندی مناسب جهت معرفی دو یا چند مدل برای یک پیشامد
    - جهت برآورده‌سازی انگیزه‌های متفاوت

فرایندهای تصادفی

نور

- موجی
  - موج پیوسته
  - مناسب جهت طراحی عدسی عینک و تلسکوپ
- ذره‌ای
  - موج گسسته (فوتون) بسته‌های انرژی
  - مناسب جهت بررسی تأثیر آن بر شبکیهٔ چشم
- هر دو مناسب و مفید

فرایندهای تصادفی

Stochastic

- ریشهٔ یونانی
- به معنای قصدِ کاری داشتن، حدس زدن چیزی، و به معنای تصادف، شانس، اتفاقی
- متضاد قطعی، حتمی

مدل قطعی

- پیش‌بینی تک‌خروجی منفرد برای مجموعه‌ای از ورودی‌ها
- پیش‌بینی خروجی با قطعیت
- مجموعه‌ای از معادلات جهت توصیف ورودی و خروجی دقیق سیستم

مدل اتفاقی

- مواقع حضور عدم‌قطعیت
- پیش‌بینی مجموعه‌ای از خروجی‌ها
- مدل کردن فرایندی که دارای نوعی تصادفی بودن است
- هر کدام دارای وزنی احتمالی یا درست‌نمایی
  - پرتاب سکه

پدیده به خودی خود قطعی یا تصادفی نیست

- بسته به انتخاب مشاهده‌گر
- و هدف وی و مفید بودن عیار انتخاب آن

واژهٔ فرایند

فرایندهای تصادفی

ابزاری ریاضی توضیح‌دهندهٔ سیستمی که در طول زمانْ احتمالی تغییر می‌کنند.

- مجموعه‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X(t), t \in T\}$
  - متغیر تصادفی X و هم‌چنین اندیس t گسسته یا پیوسته
    - T شمارش‌پذیر: X فرایند زمان گسسته
    - T بازه روی محور اعداد حقیقی: X فرایند زمان پیوسته
  - مجموعه مقادیر ممکن X: فضای حالت فرایند
    - تک- یا چندبعدی
    - گسسته یا پیوسته بودن فضای حالت

پیش‌بینی قیمت نفت در طول روزهای سال

- عدم امکان قطعیت کامل پیش‌بینی
- اما بعضی قیمت‌ها محتمل از دیگر قیمت‌ها

فرایندهای تصادفی- آغاز مطالعه و استفاده

حرکت براونی

- اولین فرایند تصادفی با مطالعهٔ گسترده
- به افتخار گیاه‌شناس رابرت براون ۱۷۷۳ تا ۱۸۵۸
- حرکت تصادفی ذرات معلق در مایع یا گاز
- لوئی باشیه
  - اولین مطالعات ریاضی این فرایند
  - مدل تصادفی بازار سهام و اختیار معامله در سال ۱۹۰۰
  - عدم توجه به دلیل ضعیفی بنیان‌های نظریه احتمال در آن روزگار
- اینشتین
  - معرف‌گر آن به جامعهٔ فیزیک با نمایش آن به عنوان روش غیرمستقیم تایید وجود اتم‌ها و مولکول‌ها

فرایندهای تصادفی

اندری کولمولگروف ۱۹۰۳ تا ۱۹۸۷

- آغاز مطالعات دقیق ریاضی آن
- ۱۹۳۳ معرفی نظریه احتمال با اصول بنیادی جهت احتمال
- تعریف اصولی همچون کار اقلیدس برای هندسه
- با روش اصل‌آغازه، تعریف دقیق فرایندهای تصادفی
- به تصور آوردن فرایند تصادفی به مثابهٔ متغیرهای تصادفی که از فضائی تابعی مقدار می‌گیرند (یا فضای یک منحنی)
- مطالعهٔ قیمت روزانه نفت در طول سال
  - منحنی تحقق‌یافتهٔ متغیر تصادفی با تعریف فضای احتمال مناسب

فرایندهای تصادفی

جوزف دووب

- در کتاب فرایندهای تصادفی ۱۹۵۳
- [فرایند تصادفی] هر فرایندی است که در طول زمان اجرا می‌شود و با قوانین احتمال کنترل می‌شود ... [به زبان دقیق‌تر] هر خانواده از متغیرهای تصادفی X_t [که] تابعی اندازه‌پذیر است ...
- سازگار با نگاه کولمولگروف و بر پایهٔ کارهای پل لوی ۱۸۸۶ تا ۱۹۷۱
- نگاه زمان‌محور و استفاده شده از ۱۹۴۰ تا امروز

همزمان کیوسی ایتو

- توسعهٔ نظریه به حساب تصادفی
- تعریف انتگرال فرایندهای تصادفی بر پایهٔ فرایندهای تصادفی دیگر
- معادلات دیفرانسیل تصادفی

کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

زنجیره مارکوف

- از فرایندهای تصادفی مهم
- توضیح حالت فعلی، حاوی تمامی اطلاعات موثر بر آیندهٔ فرایند
- استفاده از زنجیره مارکوف در مدل کارکرد
  - پیش‌بینی جریان شلوغی (ترافیک)، شبکه‌های کامپیوتری، مسائل ژنتیک، صف‌ها
- مدل‌سازی ارتباطات دوطرفه در اینترنت
  - اینترنت ساختاری پیچیده و حرکت تصادفی ترافیک بین گره‌های شبکه
  - استفاده از زنجیره مارکوف
    - جهت تبیین ترافیک که ذاتا پیش‌بینی‌ناپذیر است
    - تبیین چگونگی کار شبکه با وجود پیچیدگی در ساختارش
    - تعریف رتبه‌صفحهٔ گوگل با زنجیره مارکوف
- استفاده در آموزش

کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

زنجیره مارکوف

- مدل‌سازی زیستی
- فرض بسیاری از موارد زیستی به دارا بودن «خاصیت مارکوفی»
  - حالت فعلی سیستم، امکان پیش‌بینی آینده
- فرایند مارکوفی دو حالته زمان-پیوسته جهت مدل‌سازی
  - باز و بسته‌شدن کانال یونی
  - اتصال و انفصال مولکول لیگاند به پذیرندهٔ پروتئین

کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

حرکت براونی نسبتی

- استفاده از فرایندهای تصادفی در مدل‌کردن ورودی سیستم
- مطالعات اخیر شبکه‌های ارتباطی نشان‌دهندهٔ وابستگی برد بلند long-range dependence
- رفتار فرایندی واقعی نه تنها بسته به موقعیت t بلکه تمامی تاریخ فرایند تا زمان t
- همچنین موثر بر رفتار موردانتظار کل سیستم
  - عدم کارایی زنجیره مارکوف
- خودهمسانی self-similarity در ارتباطات شبکه‌ای
  - مقیاس‌پذیری
- امروزه توجه به مطالعات خودهمسانی و وابستگی برد بلند
  - حرکت براونی معرفی‌شده کولمولگروف جهت مدل پدیدهٔ توربولنس از مدل‌های ساده

کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

حرکت براونی و ریاضیات مالی

- پایهٔ مدل ریاضیاتی بازارهای مالی
- مورداستفاده در مدل نوسان‌ها در قیمت‌های سهام
  - نظریه قیمت‌گذاری
- اختیار معامله
  - قراردادی که فروشنده خریدار را دارای حق خرید و نه اجبار (هنگام درخواست اختیار معامله) یا دارای حق فروش (هنگام واگذاری حق اختیار) دارایی مشخصی در دوره‌ای می‌کند.
  -

کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

حرکت براونی دو-بعدی و فرایندهای مرتبط

- منجر به حل حدسیات فراوان فیزیکدانان متمرکز بر پدیده‌های مهم

کاربردها و مثال‌های فرایندهای تصادفی

مدل‌سازی زیستی

- فرایندهای شاخه‌زنی
- فرایندهای زاد و مرگ
- شبکه‌های تصادفی

تاثیر نوفه

- نیروی شکل‌دهندهٔ زیست‌شناسی
- انتقال‌های نوفه‌دار
  - کانال‌های یونی تصادفی
  - تولید نوفهٔ موتورهای مولکولی
  - ایجاد نوفه در تعامل‌های پروتئین‌پروتئین
  - نوفه موجب بیان متفاوت ژن‌ها
  - موجب تبعات قوی بر رفتار و کارکرد سلولی

مطالبی که عرضه خواهد شد

احتمالات مقدماتی

احتمال شرطی و بیزی

فرایندهای مارکوف

- زنجیره مارکوف زمان گسسته
- فرایند پواسون
- زنجیره مارکوف زمان پیوسته

فرایندهای تجدیدشونده

حرکت براونی

مراجع و منابع

[راس] S. Ross, “Introduction to Probability Models,” Academic Press- Elsevier, 12th ed, 2019.

[پینسکی] M. Pinsky, S. Karlin, “An Introduction to Stochastic Modeling,” Academic Press- Elsevier, 4th ed, 2011.

[گوبنر] J. A. Gubner, “Probability and Random Processes for Electrical and Computer Engineers,” Cambridge University Press, 2006.

[بن‌ونوتو] N. Benvenuto, M. Zorzi, “Principles of Communication Networks and Systems,” Wiley. 2011.

[راس۲] S. Ross, “Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists,” Academic Press- Elsevier, 6th ed, 2020.

[پوترمن] M. L. Puterman, “Markov Decision Processes- Discrete Stochastic Dynamic Programming,” Wiley. 2005.

[فروند] ج. فروند، «آمار ریاضی و کاربردهای آن،» مرکز نشر دانشگاهی

[ملکیان] ا. ملکیان، «ارزیابی کارایی سیستم‌ها و شبکه‌های کامپیوتری،» نص، بهار ۹۶

اینترنت و مقالات

Digital filters [7]–[10]: sophisticated filter banks [7] were designed to recognize QRS complexes in which they analyzed the positions and magnitudes of sharp waves and used a special digital band-pass filter to reduce the false detection of ECG signals in the MIT-BIH database [11]. The difference operation method (DOM) [8] scheme including two stages was proposed: the first stage was to find the point R by applying the difference equation operation to an ECG signal, then the second stage looked for the points Q and S based on the point R to find the QRS complex. The work [9] used some special digital filters to detect and classify ECG signal in time or frequency domain. Slope- and peak-sensitive band-pass filters were employed for the detection [10]. The morphological smoothing further improved its performance.

Wavelet transform (WT) [12]–[16]: the transform yields a time-scale representation similar to the time-frequency representation of the short-time Fourier transform (STFT) [12], while the WT uses a set of analyzing functions that allows a variable time and frequency resolution for different frequency bands [13]. By the multiscale feature of WT, the QRS complex can be distinguished from high P or T waves, noise, and baseline drift. The dyadic discrete WT (DWT) was usually implemented using a dyadic filter bank where the filter coefficients were directly derived from the wavelet function [14]. The WT based on the adaptive threshold [15] and WT based on multi-lead ECG [16] were evaluated on the QT database [17].

Adaptive matched filters [18]–[22]: a two-stage successive cancellation algorithm that sequentially separates

Bayesian Real-Time QRS Complex Detector for Healthcare System

ارزیابی

تمرین‌ها

- کتبی
- عملی

امتحان

- کوئیز هفتگی و شاید هر جلسه
- پایان‌فصل

- خلق دانش
- کپی‌پیست (گرفتن‌گذاشتن) اعلام منابع هر تمرین

اعلانات

حل تمرین درس: امیررضا عباسی

نحوه ارسال تمرین‌ها، پروژه‌ها، دیگر موارد

- تحویل تمرین در https://quera.org/course/18677
- عنوان: «فرآیندهای تصادفی- تمرین سری اول»
  - فایل متنی: قالب پی‌دی‌اف
  - نام فایل: FT-T#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.pdf
  - نام فایل: FT-P#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.pdf

  - دیگر فایل‌ها
  - نام فایل: FT-T#-Afshar-Mahmoud_Sotode-Morteza.zip

منابع

[پینسکی]

[Baudoin] F. Baudoin, “Stochastic Processes,” Elsevier, pp. 452- 452, 2010.

[Carfora] M. F. Carfora, “Stochastic Processes,” Enclopedia of Bioinformatics and Computational Biology, Elsevier, 2018.